JGP-Vol. 2, n. 1, 1985

# Revetements du groupe des quantomorphismes de l'oscillateur harmonique

PAUL DONATO

CPT CNRS Luminy Case 907
13288 MARSEILLE CEDEX 9
(France)

**Abstract.** *Using Souriau's diffeological structures, we define covering spaces for any diffeomorphisms group. We give an explicit construction of these covering spaces for the cases* Diff $(\mathbb{R}^n)$ *and* Quant $(\mathbb{R}^{2n})$.

## Conventions

Sauf indication contraire «différentiable» vaudra pour $C^\infty$ en particulier pour les variétés; le terme «Groupe de Lie» est réservé à la dimension finie; les quotients de groupes (souvent notés $G/H$) sont les ensembles de classes à gauche (ensemble des $gH$).

## INTRODUCTION

Considérons un système de points matériels reliés entre aux par des forces de rappel fonction de la distance; c'est une schématisation d'un cristal; «l'Oscillateur Harmonique» est l'approximation linéaire d'un tel système, et ce caractère linéaire en fait le premier niveau d'application des théories de la Mécanique Classique ou Quantique.

***Key-Words:*** *Diffeology, Covering Group*
***1980 Mathematics Subject Classification:*** *22 E 65, 22 E 70, 57 R 50.*

La quantification géométrique à la Kostant-Souriau [20] s'applique avec succès à la description des états quantiques de l'Oscillateur Harmonique; ce succès est essentiellement du à l'existence d'un sous-groupe de dimension finie du «groupe des transformations de contact» (selon la propre formulation de Dirac [6]); on réalise les relations d'incertitudes de Heisenberg en définissant une représentation unitaire continue d'une extension centrale de ce sous-groupe.

Formulations ce qui précède en termes de géométrie différentielle: l'espace des mouvements du système (un cristal dans le cas qui nous occupe) est une variété symplectique $X$ (de dimension paire $2n$). La linéarisation consiste à identifier un voisinage du repos (dans $X$) à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique canonique; identification qui se fait par l'intermédiaire d'une carte symplectique. On note $Y = \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ (le fibré quantique), $\omega$ la 1-forme de contact standard sur $Y$ et Quant $(Y)$ le groupe des transformations du fibré qui invarient $\omega$ (les «transformations de contact»). Le groupe des transformations symplectiques affines de $\mathbb{R}^{2n}$ se relève dans Quant $(Y)$, et c'est en définissant une représentation unitaire continue du revêtement à deux feuillets de ce relevé (groupe métaplectique) que l'on aboutit à un modèle satisfaisant [21]. L'obligation de passer par le revêtement est liée à «l'énergie du point zéro» des physiciens, dont la traduction géométrique fait appel à l'indice de Maslov (cf. [2] et [21]).

Mais cette procédure soulève quelques problèmes: la structure affine est une retombée de la linéarisation sans rapport avec la physique du système (quel sens donner à la «somme» de petits mouvements?). Le choix d'une linéarisation est soumis à un arbitraire dont la taille est celle du groupe des changeurs de cartes symplectiques de $X$, à savoir: Can $(\mathbb{R}^{2n})$ groupe de tous les isomorphismes de la structure symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$ (en fait du quotient de ce groupe par les symplectomorphismes linéaires).

La géométrie du système est décrite par Can $(\mathbb{R}^{2n})$, qui se relève dans Quant $(Y)$; une question se pose alors: qu'en serait-il du relevé de sous-groupes de Can $(\mathbb{R}^{2n})$, autres que le groupe affine et non nécessairement de dimension finie, qui agiraient transitivement sur $\mathbb{R}^{2n}$? Et s'agissant de revêtement, de tels sous-groupes n'introduiraient-ils pas une homotopie significative?

L'objet de ce papier est d'apporter une réponse à cette question. La première étape consistant à trouver une «bonne» définition des revêtements de groupes de difféomorphismes de variétés non compactes.

Le souci naturel de tout géomètre abordant les espaces de dimension infinie est de conserver ses outils familiers; parmi ceux-là, la topologie est certainement la structure qu'il abondonne avec le plus de réticences. S'agissant des espaces d'applications différentiables, la topologie la plus utilisée est la topologie $C^\infty$ dite de Whitney.

Considérons Diff $(X)$, le groupe des difféomorphismes d'une variété $X$. Si $X$

est compacte, la topologie de Whitney fait de Diff $(X)$ un ouvert dans les applications différentiable de $X$ dans elle-même, et aussi un groupe topologique modelé sur un expace de Fréchet (cf. [11]). Les choses se gâtent dès que l'on sort du cas compact: Diff $(X)$ (muni de la topologie de Whitney) n'est plus un groupe topologique, la topologie de Whitney n'est plus métrisable et n'est plus héréditaire au sens illustré par l'exemple suivant: la topologie induite sur $Gl(n)$ ou même sur le groupe de Lie compact $SO(n)$, considérés comme sous-espaces de Diff $(\mathbb{R}^n)$ est discrète.

De tels groupes de difféomorphismes jouent pourtant un rôle fondamental en Physique Mathématique (difféomorphismes symplectiques, groupes de jauge, groupes de courants . . .), et le physicien aimerait pouvoir étendre les propriétés «utiles» des groupes de Lie à une catégorie plus vaste. L'exemple ci-dessus indique que l'approche topologique n'est pas la mieux adaptée à ce programme. Les notions d'espaces et de groupes difféologiques ont été développées dans ce but par J.M. Souriau en 1981 [22]. Il s'agit de structures finales, appelées «difféologies», constituant une extension de la catégorie des variétés. Les flèches de la catégorie sont les «applications différentiables».

Les espaces difféologiques (appelés aussi «espaces différentiels») sont définis par la donnée de familles d'applications définies sur des ouverts d'espaces numériques. La structure est stable pour les opérations ensemblistes habituelles, produit, quotients . . . On définit aussi leur connexité.

Les groupes difféologiques sont aux espaces difféologiques ce que les groupes de Lie sont aux variétés. Tout groupe de difféomorphismes (= automorphismes de la structure différentielle) est canoniquement muni d'une structure de groupe difféologique. Il exist alors des procédures qui permettent de définir, pour tout groupe difféologiqe connexe, un revêtement universel simplement connexe, et ce, en un sens qui généralise naturellement le cas des groupes de Lie.

Le groupe Diff $(X)$ des difféomorphismes d'une variété connexe $X$ agit transitivement sur $X$; $X$ est donc en bijection avec un quotient de Diff $(X)$; cette bijection est-elle un difféomorphisme d'espaces difféologiques? Peut-on relier l'homotopie (usuelle) de $X$ à celle de Diff $(X)$? Et qu'en est-il si l'on choisit d'autres groupes difféologiques agissant transitivement sur $X$?

Ainsi apparait la nécessité d'étendre les définitions ci-dessus, revêtements et groupe fondamental, à des quotients de groupes difféologiques, quotients appelés «espaces homogènes». C'est, pour l'essentiel, l'objet de ma thèse [7], dont ce qui suit est une application. Les structures que nous obtenons sont invariantes par difféomorphisme. Ces constructions contiennent tous les cas classiques, dont on généralise de nombreux théorèmes.

Ces faits sont utilisés pour construire explicitement les revêtements universels de groupes tels que Diff $(\mathbb{R}^n)$, Can $(\mathbb{R}^{2n})$, et Quant $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1)$. On trouve que toute l'homotopie de Can ($\mathbb{R}^{2n}$) est engendrée par celle des symplectomorphismes lineaires, ce qui répond à la question du debut: la quantification de l'oscillateur harmonique par le groupe métaplectique ne laisse pas échapper d'homotopie.

Tous ces revêtements peuvent se réaliser comme groupes de difféomorphismes de variétés auxiliaires, ceci est précieux, on sait en effet construire des représentations unitaires continues de tels groupes, en utilisant les demi-densités à support compact [22].

Parmi les espaces accessibles aux techniques difféologiques se trouvent également les quotients de groupes de Lie par des sous-groupes quelconques, tels que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ou le quotient irrationnel du tore; ce dernier a été étudié du point de vue difféologique (revêtements et homotopie) dans un travail que j'ai fait en collaboration avec P. Iglesias [8]. Le résultat principal de ce dernier calcul, est la classification difféologique de ces tores; $T\alpha$ et $T\beta$ sont difféomorphes si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ (les pentes des enroulements) sont unimodulairement équivalents. Et la structure de groupe des difféomorphismes de $T\alpha$, dépend du fait que $\alpha$ irrationnel soit, ou non, quadratique.

En ce qui concerne cette classification, il y a coïncidence des résultats avec ceux obtenus par la théorie des $C^*$-algèbres [4] et [18].

En introduction, nous exposons l'axiomatique des espaces difféologiques, nous énonçons également une série de propositions sans en donner de démonstration (elles se trouvent dans [22]). Dans le § 1 sont introduites les notions d'espace homogène difféologique et de groupe générateur. Nous indiquons quelles notions sont utilisées pour aboutir à la définition des revêtements proprement dits. Les exemples cités ci-dessus occupent la dernière partie de cet article.

C'est Jean-Marie Souriau qui a dirigé ce travail, tout au long duquel il m'a accordé son temps et ses conseils; il me plaît de pouvoir lui exprimer ici toute ma reconnaissance.

## 0. ESPACES ET GROUPES DIFFEOLOGIQUES

La structure différentielle d'une variété différentiable $X$, peut être caractérisée par un atlas, mais peut aussi être définie par la donnée de toutes les fonctions différentiables d'ouverts d'espaces numériques à valeurs dans $X$. En choisissant comme axiomes certaines propriétés de ces fonctions, il va être possible d'étendre la notion de variété sans perdre grand chose d'essentiel.

### 0.1. Premières notions

*Notations 0.1.1.* $f$ étant une application quelconque, def $(f)$ désignera son ensemble de définition et Im $(f)$ désignera l'ensemble $f(\text{def}(f))$. Une famille $(f_i)$ d'applications sera dite compatible si les $f_i$ admettent un prolongement commun.

DÉFINITION 0.1.2. Soit $X$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appellera $p$-plaque de $X$ ($p \in \mathbb{N}$) toute application $C^\infty$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $X$. Les plaques ainsi définies vérifient les propriétés suivantes:

D0) Toute $p$-plaque de $X$ est une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $X$.

D1) Toute application constante de $\mathbb{R}^p$ dans $X$ est une $p$-plaque de $X$.

D2) Le plus petit prolongement d'une famille compatible de $p$-plaques de $X$ est une $p$-plaque de $X$.

D3) Si $P$ est une $p$-plaque de $X$ et $Q$ une $q$-plaque de def $(P)$ alors $P \circ Q$ est une $q$-plaque de $X$.

Réciproquement, soit $X$ un ensemble; pour chaque entier $p \geqslant 0$, choisissons une classe de fonctions que nous appellerons $p$-plaques de $X$; nous dirons que ces plaques constituent une *diffeologie* de $X$ si elles vérifient les axiomes D0, D1, D2, D3 ci-dessus. La catégorie des *espaces diffeologiques* est celle dont les objets sont les ensembles munis d'une difféologie et les flèches les applications différentiables au sens suivant.

Une application $f : X \to Y$ sera dite différentiable si pour toute plaque $P$ de $X$, $f \circ P$ est une plaque de $Y$. Les isomorphismes de cette catégorie sont appelés *diffeomorphismes*.

On note $D(X, Y)$ l'ensemble des applications différentiables de $X$ à $Y$. Nous noterons $DL(\mathbb{R}^p, X)$ l'ensemble des $p$-plaques d'un espace difféologique $X$. Les $p$-plaques de $\mathbb{R}^n$, définies en 0.1.2, munissent $\mathbb{R}^n$ d'une difféologie: la difféologie standard; il en résulte que les plaques d'un espace difféologique sont différentiables. L'axiome D2 exprime qu'une application localement égale à des plaques est elle même une plaque.

Toute variété différentiable possède naturellement une structure d'espace difféologique, celle dont les $p$-plaques sont les applications $C^\infty$ d'ouverts de $\mathbb{R}^p$ dans $X$. Mais rien n'empêche de considérer d'autres difféologies, (voir à ce sujet la fin du § 1).

DÉFINITION 0.1.3. Si $D$ et $D'$ sont deux difféologies sur un même ensemble $E$, on dira que $D$ est *plus fine* que $D'$ si:

$$\mathrm{id}\,(E) : (E, D) \longrightarrow (E, D')$$

est différentiable; $D$ contient alors moins de plaques que $D'$.

L'intersection d'une famille quelconque de difféologies de $E$ est une difféologie qui est donc, pour la relation d'ordre définie ci-dessus, la borne supérieure de la famille. La difféologie la plus fine sur un ensemble sera dite *discrete*; ses plaques sont les applications localement constantes.

DÉFINITIONS 0.1.4. Soient $E$ et $E'$ deux ensembles et $f : E' \to E$, si $E$ est un espace difféologique, la difféologie *image reciproque* par $f$ est la moins fine des difféologies de $E'$ pour laquelle $f$ soit différentiable. Ainsi toute partie $E'$ d'un espace difféologique $E$ est munie de la *diffeologie induite*: image réciproque par l'inclusion; ses plaques sont les plaques de $E$ qui sont à valeurs dans $E'$.

On appellera difféologie *image*, par une application $f : E \to E'$, la plus fine de celles qui rendent $f$ différentiable. Si de plus $f$ est surjective, on dira que $f$ est une *submersion*.

La difféologie image est donnée explicitement, dans le cas d'une submersion $P : E \to E'$, par:

$$(0.1.5) \qquad \begin{cases} f \in DL\,(\mathbb{R}^n, E') \text{ ssi tout point de } \operatorname{def}(f) \text{ admet un voisinage} \\ U \text{ tel qu'il existe une } n\text{-plaque de } E\ \varphi : U \to E, \text{ vérifiant} \\ f = P \circ \varphi. \end{cases}$$

C'est la propriété de *relèvement local* des plaques.

Il est intéressant de noter que dans le cas de variétés de dimension finie, les submersions sont bien caractérisées par (0.1.5) qui n'utilise pas la notation de rang (et pour cause!).

*Remarque 0.1.6.* Une bijection différentiable est un difféomorphisme si et seulement si c'est une submersion.

Si $E$ est un espace difféologique muni d'une relation d'équivalence $\sim$, le quotient $E/\sim$ est muni de la *diffeologie quotient*, image de celle de $E$ par la projection canonique.

PROPOSITION 0.1.7. *Soient $E$, $E'$, $E''$, des espaces difféologiques, et $p : E \to E'$ une submersion, alors $f : E' \to E''$ est différentiable si et seulement si $f \circ p$ est différentiable.*

On pourrait penser que la stabilité de la structure difféologiquele se fait au détriment de sa pertinence; un exemple simple montre qu'il n'en est rien; c'est celui de la demi-droite fermée $[0, +\infty[$, sur laquelle on peut définir, outre la difféologie induite par $\mathbb{R}$:

– la difféologie image de celle de $\mathbb{R}$ par l'application $x \mapsto x^2$

– la difféologie quotient de celle du plan par le feuilletage des cercles concentriques à l'origine.

P. Iglesias a pu montrer que toutes ces difféologies sont inéquivalentes, c.à.d. qu'il n'existe pas de difféomorphisme de l'une à l'autre. On voit que l'on obtient ainsi autre chose que la structure différentielle de variété à bord. C'est un indice que la difféologie peut être un outil adapté aux problèmes de feuilletages (voir aussi [8]).

Il existe, sur le produit cartésien $E$ d'une famille quelconque d'espaces difféologiques $Ek$, une difféologie produit: la moins fine de celles qui rendent toutes les projections $Pk$ différentiables. Si $E'$ est un espace difféologique, une application $f : E' \to E$ est différentiable ssi les $Pk \circ f$ le sont.

## 0.2. Difféologies de groupe

DÉFINITION 0.2.1. Nous appellerons *diffeologie de groupe* une diffeologie définie sur un groupe $G$ qui rende différentiable l'application:

$$(g, g') \mapsto g^{-1}g' \text{ (de } G \times G \text{ à } G)$$

Un tel groupe sera dit *groupe diffeologique*.

Ces objets forment une catégorie dont les flèches sont les *D-morphismes*: morphismes de groupes qui sont différentiables.

*Exemples de groupes difféologiques*

1 - Les groupes de Lie, munis de leur loi de groupe et de leur difféologie de variété, sont des groupes difféologiques.

2 - Tout sous-groupe $H$ d'un groupe difféologique $G$ ($H$ muni de sa difféologie de partie). Tout quotient d'un groupe difféologique par un sous-groupe invariant, en particulier tout quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe invariant quelconque.

3 - Les groupes de difféomorphismes dont la difféologie est définie ci-dessous.

*Groupes de difféomorphismes*

a) Soit $E$ un espace difféologique. L'ensemble Diff $(E)$ de tous les difféomorphismes de $E$ sur $E$, muni de la loi de composition, est un groupe.

b) Diff $(E)$ est muni d'une difféologie dont les $n$-plaques sont applications $f$, d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans Diff $(E)$ telles que:

$$(r, x) \mapsto f(r)(x) \text{ et } (r, x) \mapsto f(r)^{-1}(x) \tag{0.2.2}$$

appartiennent à $DL(\mathbb{R}^n \times E, E)$. C'est la plus fine difféologie de groupe pour laquelle l'application: $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ soit différentiable de Diff $(E) \times E$ dans $E$.

Ainsi tout groupe de difféomorphismes (sous-groupe de Diff $(E)$, $E$ variété ou espace difféologique) est canoniquement un groupe difféologique.

## 0.3. Quotients et D-morphismes stricts

Soit $H$ un sous-groupe quelconque d'un groupe difféologique $G$. Nous notons

$G/H$ l'espace des classes à gauche modulo $H$, muni de la difféologie quotient, et $C$ la submersion canonique:

$$C : G \to G/H; \quad C(g) = gH.$$

Dans le cas particulier où $G/H$ est un groupe ($H$ est invariant), alors: la difféologie quotient fait de $G/H$ un groupe difféologique, et $C$ est alors un $D$-morphisme.

Soit $f$ un $D$-morphisme de $G$ à $G'$; algébriquement $f$ se décompose canoniquement suivant:

(0.3.1) $$G \xrightarrow{C} G/\ker(f) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{val}(f) \xrightarrow{i} G'$$

où $C$ est la surjection canonique, $\tilde{f}$ l'isomorphisme algébrique induit par $f$ et $i$ l'inclusion de val $(f)$ dans $G'$. $\tilde{f}$ est un $D$-morphisme bijectif. Nous dirons que $f$ est un $D$-morphisme strict si $\tilde{f}$ est un $D$-isomorphisme.

DÉFINITION 0.3.2. Un $D$-morphisme strict et injectif $f : G \to G'$ sera appellé réalisation du groupe $G$ dans $G'$.

## 0.4. Revêtements de groupes difféologiques

DÉFINITION 0.4.1. Un partie $A$ d'un espace difféologique $X$ sera dite discrète si la difféologie induite sur $A$ est la difféologie discrète: les seules plaques à valeurs dans $A$ sont les applications localement constantes.

Par exemple $\mathbb{Q}$ est une partie difféologiquement discrète de $\mathbb{R}$.

### 0.4.2. LE GROUPE DES ARCS

On notera Arc $(G)$ l'ensemble des fonctions différentiables $\gamma$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $G$, groupe difféologique, et telles que $\gamma(0) = e$, où $e$ est l'élément neutre de $G$. Le produit dans $G$ définit naturellement une structure de groupe sur Arc $(G)$ par: $(\gamma\mu)(t) = \gamma(t)\,\mu(t)$.

On définit une difféologie sur Arc $(G)$: les plaques sont les applications $r \mapsto f(r)$, de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ dans Arc $(G)$, telles que:

(0.4.3) $(r, t) \mapsto f(r)(t)$ (de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $G$) soit différentiable.

PROPOSITION 0.4.4. Arc $(G)$ *est un groupe difféologique pour la difféologie* 0.4.3.

On peut ainsi parler de chemins différentiables dans Arc $(G)$. Pour tout $\gamma \in$ Arc $(G)$ posons:

(0.4.5) $$U(\gamma) = \gamma(1)$$

$U$ est trivialement un $D$-morphisme de groupes. Mais de plus.

PROPOSITION 0.4.6. *$U$ est un $D$-morphisme strict de* Arc $(G)$ *dans $G$.*

Ce résultat permet d'établir la proposition suivante:

DÉFINITION THÉOREME 0.4.7. Un sous-groupe $H$ d'un groupe difféologique $G$ sera dit ouvert ssi $G/H$ est discret. Il existe un plus petit sous-groupe ouvert $G_0 = \text{val}\,(U)$ qui sera la composante neutre de $G$. Un groupe $G$ sera dit connexe s'il est égal à sa composante neutre, donc s'il n'admet pas de sous-groupe ouvert propre. La composante neutre est le plus grand sous-groupe connexe de $G$.

*Remarques 0.4.8*

1 - Il y a donc coïncidence entre la connexité et la connexité par arcs différentiables.

2 - Si $f$ est un $D$-morphisme $f: G \to G'$ alors $f(G_0)$ est contenu dans $G'_0$. En particulier $G_0$ est invariant par tout $D$-automorphisme de $G$.

3 - Arc $(G)$ (0.4.2) est connexe par arcs différentiables. En effet, pour $\gamma$ et $\mu$ dans Arc $(G)$, posons; $\Theta(s)(t) = \gamma[(1-s)\,t]\,\mu(st)$, $s$ et $t$ réels; $\Theta$ est un chemin différentiable dans Arc $(G)$ passant par $\gamma$ et $\mu$.

*Notations 0.4.9.* On note $L(G) = \text{Ker}\, U$ (groupe des lacets) et $L(G)_0$ sa composante neutre. $L(G)$ et $L(G)_0$ sont tous deux des sous-groupes invariants de Arc $(G)$. On a:

(0.4.10) $\quad$ $U$ étant strict, $G_0$ est $D$-isomorphe à Arc $(G)/L(G)$

DÉFINITION 0.4.11. Soit $G$ un groupe difféologique. Nous appellerons revêtement de $G$ tout groupe difféologique $G'$ tel que $G$ soit $D$-isomorphe au quotient de $G'$ par un sous-groupe invariant discret.

*Example.* Les rationnels forment une partie discrète de $\mathbb{R}$ (au sens différentiel bien sûr); et donc la projection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un revêtement.

*Remarque 0.4.12.* Soit $P: G \to G'$ un revêtement de groupes difféologiques et $H = \text{Ker}\,(P)$; on peut montrer que $G_0$ est inclus dans le commutant $G1$ de $H$. On peut alors vérifier que $P(G_0) = G'_0$ et que $(G_0, P)$ est un revêtement de $G'_0$.

## 0.5. Revêtements connexes

Si $P: G \to G'$ est un revêtement connexe de $G'$, $G'$ est lui-même connexe et on a grâce à la remarque 0.4.12 $G = G_0 =$ commutant (ker $(P)$), ker $(P)$ est central donc abélien: tout revêtement connexe est donc *une extension centrale*.

Soit $G$ un groupe difféologique connexe. On construit le diagramme commutatif (notations 0.4.5 et 0.4.9):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Arc}\,(G) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "U"'] & \widetilde{G} = \mathrm{Arc}\,(G)/L(G)_0 \arrow[d, "\pi"] \\ & G \approx \mathrm{Arc}\,(G)/L(G) \end{tikzcd} \tag{0.5.1}$$

où $\Psi$ est la surjection canonique et $\pi$ est définie par $\pi \circ \Psi = U$; $L(G)/L(G)_0$ étant discret, $\pi : \mathrm{Arc}\,(G)/L(G)_0 \to G$ définit un revêtement de $G$. D'autre part Arc $(G)$ est connexe et par suite $\widetilde{G}$, il en résulte que le noyau de $\Psi$, à savoir $L(G)/L(G)_0$, est central donc *abélien*.

DÉFINITIONS THÉOREME 0.5.2. Un groupe difféologique sera dit simplement connexe s'il est $D$-isomorphe à tous ses revêtements connexes. Pour que $G$, connexe, soit simplement connexe il faut et il suffit que le groupe de ses lacets soit connexe $(L(G) = L(G)_0)$. Un revêtement simplement connexe de $G$ est revêtement de tout revêtement connexe de $G$. Tout groupe connexe $G$ admet un revêtement simplement connexe unique à un $D$-isomorphisme près, on l'appellera revêtement universel de $G$. Pour tout groupe difféologique connexe le revêtement construit en 0.5.1 est simplement connexe.

$\widetilde{G} = \mathrm{Arc}\,(G)/L(G)_0$ est connexe et simplement connexe, c'est donc un revêtement universel de $G$, de plus la fibre au-dessus de l'élément neutre est égale à $L(G)/L(G)_0$, les autres fibres s'en déduisant par difféomorphisme. Ceci conduit à la définition suivante;

DÉFINITION 0.5.3. On appellera groupe $D$-fondamental, ou groupe d'homotopie, d'un groupe difféologique connexe $G$ le quotient:

$$D - \Pi_1(G) = L(G)/L(G)_0.$$

Ce groupe est donc abélien. Dans le cas particulier où $G$ est un groupe de Lie connexe de dimension finie on retrouve le revêtement universel et le groupe fondamental usuels de $G$. On généralise aussi la proposition:

PROPOSITION 0.5.4. *Tout $D$-morphisme $\varphi : G \to G'$, $G$ simplement connexe se relève dans tout revêtement de $G'$ en un unique $D$-morphisme.*

Nous avons prouvé [7] que deux groupes connexes difféomorphes ont des revétements universels difféomorphes et des groupes fondamentaux isomorphes; ainsi les objets définis ci-dessus *ne dépendent que de la difféologie du groupe*. Nous le faisons en étudiant une classe particulière d'espaces difféologiques: les espaces homogènes.

## §1. ESPACES DIFFEOLOGIQUES HOMOGENES

Les espaces homogènes vont être définis, à un difféomorphisme près, comme des quotients de groupes difféologiques. On se reportera à [7] pour le détail des deux paragraphes suivantes.

### 1.1. Actions différentiables

DÉFINITION 1.1.1. Soit $G$ un groupe difféologique, $X$ un espace difféologique. On appellera $D$-action de $G$ sur $X$ tout $D$-morphisme $A : G \to \mathrm{Diff}\,(X)$.

Pour qu'une action de $G$ sur $X$ soit une $D$-action il faut et il suffit que $(g, x) \mapsto A(g)(x)$ soit différentiable de $G \times X$ dans $X$ (on utilise 0.2.2).

Pour alléger les notations nous écrirons parfois $\underline{g}(x)$, ou même $g(x)$, au lieu de $A(g)(x)$. Nous appellons stabilisateur d'un point le sous groupe des $g$ qui laissent le point fixe (souvent appelé sous-groupe d'isotropie).

*D-action naturelle de G sur G/H*

Soit $G$ un groupe difféologique et $H$ un sous-groupe quelconque, $G/H$ est l'ensemble des classes à gauche muni de la difféologie image par la projection $C(g) = gH$. $H$ désignera aussi bien le sous-groupe que le point de base canonique $C(e)$.

Considérons, pour tout $g$ dans $G$, le difféomorphisme translation à gauche par $g : Lg : G \to G$, $Lg(g') = gg'$, $Lg$ induit sur $G/H$ l'application $\bar{L}g$, définie sans équivoque par l'égalité:

$$(1.1.2) \qquad \bar{L}g \circ C = C \circ Lg$$

$\bar{L}g$ est différentiable grâce à $\bar{L}g \circ C = C \circ Lg$ et à 0.1.7. On pose:

$$(1.1.3) \qquad \bar{L} : G \longrightarrow \mathrm{Diff}\,(G/H) \text{ avec } \bar{L}(g) = \bar{L}g \text{ (pour tout } g \in G)$$

$\bar{L}$ est trivialement un morphisme de groupes, on peut montrer que $\bar{L}$ est différentiable. Cette action sera dite standard ou canonique.

Considérons alors une $D$-action $A$ de $G$ sur un espace $X$. Notons $Gx$ et $Ox$ respectivement le stabilisateur et l'orbite d'un point $x \in X$. Fixons $x$; on a le schéma:

$$(1.1.4)\qquad \begin{array}{c} G \\ \Big\downarrow C \\ G/Gx \xrightarrow{Sx} Ox \end{array}$$

où $Sx$ est la bijection définie par: $Sx(gGx) = A(g)(x)$; $C$ est la submersion canonique; $Sx$ est différentiable car $Sx \circ C(g) = A(g)(x)$ l'est par hypothèse. Dans ces conditions:

LEMME 1.1.5. *$Sx$ est un difféomorphisme si et seulement si $g \mapsto A(g)(x)$ est une submersion.*

C'est une conséquence immediate des définitions et de 0.1.7.

DÉFINITION 1.1.6. Un espace difféologique $X$ sera dit *homogene* s'il est difféomorphe au quotient (gauche) d'un groupe difféologique $G$ par un sous-groupe $H$; nous dirons alors que $G$ est *generateur* de $X$.

Ce sera en particulier le cas si un groupe $G$ agit transitivement sur un espace difféologique $X$ de sorte que 1.1.4 soit une submersion. En fait on a le théorème:

THÉOREME 1.1.7. *Un espace difféologique $X$ est homogène de groupe générateur $G$, si et seulement s'il existe une $D$-action transitive $A$ de $G$ sur $X$ telle que pour un point $x \in X$ fixé: $g \mapsto A(g)(x)$ définisse une submersion surjective de $G$ sur $X$. Ce sera alors le cas pour tout point $y \in X$, et, de plus, $Gy$ désignant le stabilisateur de $y$, $gGy \mapsto A(g)(y)$ est un difféomorphisme de $G/Gy$ sur $X$.*

Il pourra à priori exister plusieurs groupes générateurs d'un espace homogène donné. On peut montrer: que tout revêtement d'un groupe générateur est lui-même générateur, que tout sur-groupe générateur est générateur, et qu'un espace homogène admet toujours son groupe de difféomorphismes comme générateur.

### 1.2. Les situations $\mathbf{K \subset H \subset G}$

On se donne un groupe difféologique $G$ et deux sous-groupes emboîtés $K \subset H \subset G$.

1 - Soient: $C$ la surjection canonique de $G$ sur $G/H$, $C'$ celle de $G$ sur $G/K$, et $p$ la projection définie par $p \circ C' = C$ : $p$ est une submersion et $p^{-1}(gH) = \bar{L}g(H/K)$, donc les «fibres» sont toutes difféomorphes à $H/K$.

2 - Si de plus $K$ est invariant dans $H$ alors le groupe $H/K$ opère différentiablement

à droite dans $G/K$; cette action est standard.

3 - Si $K$ est distingué dans $G$, $H/K$ est alors sous-groupe de $G/K$. On peut alors établir que;

(1.2.1) $\quad G/H$ est difféomorphe à $(G/H)/(H/K)$.

Si de plus $K$ et $H$ sont tous deux invariants dans $G$, on a:

(1.2.2) $\quad G/H$ est $D$-isomorphe à $(G/K)/(H/K)$.

Ces formules de simplification 1.2.1 et 1.2.2 permettent d'établir, entre autres, que tout revêtement d'un groupe générateur est lui-même générateur.

**1.3. Connexité par arcs**

On appellera chemin (ou arc) d'un espace difféologique $E$, une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans $E$. Une partie $A$ de $E$ est *connexe* si deux points quelconques de $A$ peuvent être reliés par un arc de $E$. La relation «être relié par un chemin différentiable» est une relation d'équivalence dans $E$; la transitivité se vérifie comme suit: soient $c$ et $d$ deux chemins de $E$ tels que $c(1) = d(0)$, soit $\varphi$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfinement différentiable, non décroissante et vérifiant:

(1.3.1)
$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant 1/8 \\ 1/2 & \text{si } 3/8 \leqslant t \leqslant 5/8 \\ t & \text{si } 7/8 \leqslant t \end{cases}$$

l'application $\tau$ définie par: $\tau(t) = c(2\varphi(t))$ si $t \leqslant 5/8$ et $\tau(t) = d(2\varphi(t) - 1)$ si $3/8 \leqslant t$, est un chemin partout différentiable reliant dans $E$ $c(0)$ à $d(1)$.

On peut alors définir la *composante connexe* d'un point $x \in E$, comme la plus grande partie connexe contenant $x$. Il est alors immédiat que:

*Remarques 1.3.2.* L'image d'un espace connexe, par une application différentiable, est connexe. En particulier:

1 - l'image par une plaque d'une partie connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

2 - Tout quotient d'un espace difféologique connexe est un espace différentiel connexe.

3 - Toute application différentiable d'un espace connexe dans un espace discret (i.e. muni de la difféologie discrète) est constante.

4 - Signalons enfin que la composante neutre $G_0$ d'un groupe différentiel $G$, définie en 0.4.7, est la composante connexe de l'élément neutre et que les composantes connexes de $G$ sont les classes modulo $G_0$.

THÉOREME 1.3.3. *Soit* $X$ *un espace difféologique homogène de groupe générateur* $G$. *Alors:* $X$ *est connexe si et seulement si* $G_0$ *est groupe générateur.*

Tout espace homogène connexe admet un générateur simplement connexe. Le résultat-clé est alors le suivant:

LEMME 1.3.4. (fondamental) *Soient* $G$ *et* $G'$, *deux groupes simplement connexes,* $H$ *(resp.* $H'$*) un sous-groupe de* $G$ *(resp.* $G'$*),* $p$ *(reps.* $p'$*) la projection de* $G/H_0$ *sur* $G/H$ *(resp.* $G'/H'_0$ *sur* $G'/H'$*). Soit* $f$ *un difféomorphisme de* $G/H$ *à* $G'/H'$*; on se donne* $g' \in G'$ *tel que* $\bar{L}g'(f(H)) = H'$ (1.1.2), *il existe alors un difféomorphisme* $F$ *de* $G/H_0$ *à* $G'/H'_0$ *vérifiant:*

1) $p' \circ F = f \circ p$

2) $\bar{L}g' \circ F$ *induit un D-isomorphisme de* $H/H_0$ *à* $H'/H'_0$.

Dont une première conséquence est la proposition:

PROPOSITION 1.3.5. *Si deux groupes difféologiques connexes* $G$ *et* $G'$ *sont difféomorphes, alors leurs revêtements universels le sont aussi et leurs groupes fondamentaux sont D-isomorphes.*

$G$ et $G'$ sont quotients de leurs revêtements universels (respectivement $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}'$) par des sous-groupes discrets (0.4 et 0.5), c'est donc la situation 1.3.4 avec $H_0$ et $H'_0$ réduits à l'élément neutre, ainsi $\widetilde{G}$ est difféomorphe à $\widetilde{G}'$ et les groupes fondamentaux qui correspondent à $H$ et à $H'$ sont $D$-isomorphes.

Une autre application de 1.3.4 est la classification des tores de Denjoy-Poincaré du type $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ (voir [8]).

La preuve de 1.3.4 passe par l'adaptation à la difféologie de notions telle que l'homotopie des chemins: on remplace dans la définition classique continu par différentiable; il faut néanmoins prendre des précautions pour rester dans la catégorie des espaces difféologiques.

## §2. REVETEMENTS D'ESPACES HOMOGENES

### 2.1. Fibrations

Nous introduisons une notion particulière de fibrés homogènes à fibres homogènes, elle suffira à décrire les revêtements d'espaces homogènes. Les définitions conservent la terminologie de la géométrie différentielle classique.

DÉFINITION 2.1.1. Un fibration d'un espace difféologique $X$ est la donnée d'une relation d'équivalence sur $X$, notée $\sim$, telle que:

il existe un groupe générateur $G$ de $X$ dont l'action soit compatible avec l'équivalence, c.à.d. que pour tous $g \in G$, $x, y \in X$ on a: $x \sim y \Rightarrow g(x) \sim g(y)$). On dira que $X$ est fibré.

Un espace fibré $X$ est donc nécessairement homogène.

Les classes d'équivalences seront appelées fibres, images réciproques de points par la submersion canonique ($X/\sim$ est muni de la difféologie quotient).

*Remarque.* Tout difféomorphisme de $X$ compatible avec $\sim$ n'à pas nécessairement son inverse compatible; ce sera le cas s'il est dans un groupe de difféomorphismes compatibles, il induit alors un difféomorphisme de la base, et un tel groupe est aussi groupe générateur de $X/\sim$ (le critère 1.1.7 s'appliquant aisément).

De façon équivalente, un fibré pourra être la donnée d'une submersion $p : X \to Y$ d'espaces difféologiques telle qu'il existe un groupe $G$ générateur de $X$ dont l'action respecte l'équivalence modulo $p$. Le plus grand groupe de difféomorphismes de $X$ compatibles avec la projection contient donc $G$ et se trouve ainsi être générateur de $X$; ce groupe constitue donc un choix canonique de générateur compatible du fibré et l'on pourra dire: «soit le fibré $p : X \to Y$» sans spécifier le groupe générateur compatible.

Deux fibrés $p : Y \to X$ et $p' : Y' \to X'$ seront dit $D$-isomorphes s'il existe deux difféomorphismes $f : Y \to Y'$ et $h : X \to X'$ tels que $p' \circ f = h \circ p$.

*Notations 2.1.2.* Si $X$ est fibré, de groupe $G$, on a donc $X \approx G/Gx$, $Gx$ stabilisateur d'un point $x$ fixé, et: $d : gGx \mapsto g(x)$ définit un difféomorphisme.

Soit $Ax$ le sous-groupe des $g \in G$ qui invarient la fibre contenant $x$. Il immédiat que $Ax$ admet $Gx$ comme sous-groupe et qu'il agit transitivement sur $p(x)$ et par suite sur chaque fibre de $X$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G/Gx & \xrightarrow{p'} & G/Ax \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ X & \xrightarrow{p} & X/\sim \end{array} \qquad (2.1.3)$$

Dans ces conditions on a la proposition:

PROPOSITION 2.1.4. *Il existe un difféomorphisme $d' : G/Ax \to X/\sim$ rendant le diagramme 2.1.3 commutaif.*

$d'$ est défini sans équivoque par $d'(gAx) = p(g(x))$; les vérifications se font sans difficulté.

Toutes les fibres de $X$ sont donc difféomorphes à $Ax/Gx$ que nous pourrons appeler fibre-type.

Réciproquement: étant donné $G$ et deux sous-groupes $H \subset A \subset G$, alors $G/H$ muni de la relation d'équivalence: $gH \sim g'H$ ssi $gA = g'A$, est un fibré de fibre type $A/H$ (1.2). Ce sera *la situation typique de fibré*. Si $H$ est distingué dans $A$ le fibré sera dit principal.

*Remarque 2.1.5.* Si l'action d'un groupe difféologique $G$ est compatible avec une équivalence, il est trivial que l'action de tout revêtement de $G$ est encore compatible.

## 2.2. Revêtements

DÉFINITION 2.2.1. Un fibré $p : X \to Y$ à fibres discrètes sera appelé revêtement.

Et dans ce cas, si $G$ est un générateur compatible, $Ax/Gx$ (notations 2.1.2 et lemme 2.1.4) est discret pour tout $x$; ce qui est équivalent à $(Ax)_0 = (Gx)_0$.

*Revêtements connexes*

Un revêtement $p : X \to Y$, est dit revêtement connexe si $X$ est connexe (ce qui entraîne la connexité de $Y$). Cette notion est transitive: un revêtement connexe d'un revêtement connexe de $Y$ est revêtement connexe de $Y$.

## 2.3. Simple connexité

DÉFINITION 2.3.1. Un espace difféologique homogène connexe est dit simplement connexe s'il est difféomorphe à tous ses revêtements connexes.

Le lemme 1.3.4 va permettre de caractériser les espaces homogènes simplement connexes, puis de classer les revêtements connexes d'un espace homogène (cf. [7] pour les preuves).

LEMME 2.3.2. *Un espace difféologique homogène connexe $X$ est simplement connexe si et seulement s'il est difféomorphe au quotient d'un groupe simplement connexe par un sous-groupe connexe.*

Pour tout revêment connexe $p : Y \to X$, de $X$ simplement connexe, la projection $p$ est un difféomorphisme.

THÉOREME DÉFINITION 2.3.3. *Tout espace homogène $X$ connexe admet un* *revêtement simplement connexe $p : \widetilde{X} \to X$, revêtement de tout revêtement connexe de $X$, unique à un difféomorphisme près: on l'appellera revêtement universel de $X$.*

1 - Si $G$ est un groupe simplement connexe générateur de $X \approx G/H$, alors: $G/H_0 \to G/H \approx X$, est revêtement universel de $X$.

2 - Les revêtements connexes de $X$ sont déterminés, à un $D$-isomorphisme de fibrés près, par les classes de conjugaison de sous-groupes de $H/H_0$. Ils sont tous, à un isomorphisme de fibrés près, de la forme:

$$G/K \to G/H \quad \text{où} \quad H_0 \subset K \subset H.$$

3 - Par ailleurs, $H/H_0$ ne dépend pas du choix de $G$, il définit donc un groupe abstrait: le groupe $D$-fondamental de $X$ noté $D - \Pi_1(X)$, qui est nul si et seulement si $X$ est simplement connexe.

Citons aussi une proposition dont l'énoncé est une définition en topologie.

PROPOSITION 2.3.4. *Un espace difféologique $X$ homogène et connexe, est simplement connexe si et seulement si tout lacet de $X$ est homotope à un lacet constant (c.à.d. dans la même composante connexe que le lacet constant, dans l'expace difféologique des chemins de $E$).*

On dispose également de la proposition:

PROPOSITION 2.3.5. *Soient $X$ et $Y$ deux espaces homogènes connexes, si $X$ est simplement connexe alors: toute application différentiable de $X$ à $Y$ se relève globalement dans tout revêtement connexe de $Y$. Deux relèvements égaux en un point sont alors partout égaux.*

C'est l'analogue d'un théorème classique en topologie générale.

### 2.4. Une construction à partir du groupe

Soient $H \subset G$ des groupes difféologiques, $G$ connexe. L'action de $G$ sur $G/H$ induit une action transitive de Arc $(G)$ (notaions 0.4.2) sur ce quotient, pour tout $\gamma \in \text{Arc}\,(G)$ on pose:

$$\underline{\gamma}(C(g)) = (\gamma(1)g)H$$

le stabilisateur $S(H)$ du point $H$ pour cette action est caractérisé par:

$$S(H) = U^{-1}(H). \tag{2.4.1}$$

On a la propostion:

THÉOREME 2.4.2. (notations 0.4.2 et 2.4.1). *Si* $G$ *est un groupe difféologique connexe,* $H$ *un sous-groupe de* $G$, *alors;*

a) $$p : \mathrm{Arc}\,(G)/S(H)_0 \to G/H \quad p(\gamma S(H)_0) = \gamma(1)H$$

*est revêtement universel de* $G/H$.

b) *Tous les revêtements connexes de* $G/H$ *sont donnés, à un* $D$*-isomorphisme de fibré près, par:*

$$p : \mathrm{Arc}\,(G)/\Gamma \to G/H \quad p(\gamma\Gamma) = \gamma(1)H.$$

*Où* $S(H)_0 \subset \Gamma \subset S(H)$. *Ces revêtements sont indexés par la classe de conjugaison du sous-groupe* $\Gamma$.

c) $D - \Pi_1(G/H) \approx S(H)/S(H)_0$.

Cette construction est utilisée pour relier les revêtements usuels des variétés (qui sont des espaces homogènes) avec ceux issus de la difféologie. Elle permet également d'établir les:

### 2.5. Relations entre $\mathbf{D - \Pi_1(G)}$ et $\mathbf{D - \Pi_1(G/H)}$

Beaucoup des théorèmes, vrais en dimension finie, sur les revêtements groupes de Lie se généralisent aux groupes difféologiques, en voici deux exemples (cf. cours de Dieudonné [5] ou celui de Godbillon [10]). $G$ est toujours supposé connexe.

THÉOREME 2.5.1. *Si* $H$ *est sous-groupe connexe d'un groupe difféologique connexe* $G$ *alors* $D - \Pi_1(G/H)$ *est abélien.*

Et aussi:

THÉOREME 2.5.2. *Si l'espace homogène* $G/H$ *est simplement connexe alors* $H$ *est connexe et* $D - \Pi_1(G)$ *est un quotient de* $D - \Pi_1(H)$.

*A propos des groupes d'homotopie l'ordre supérieur.*

Les règles du jeu utilisées en topologie pour définir les groupes d'homotopie: homotopie d'applications définies sur des sphères, juxtaposition d'applications, ont leurs analogues en difféologie, et ce, au prix de quelques précautions techniques [7]. Les groupes d'homotopie sont alors définis en remplaçant continu par différentiable dans la construction topologique classique. Ces notions trouveront leur place dans un travail actuellement en chantier: les fibrés difféologiques et leur suite exacte d'homotopie (P. Iglesias [14]). Si $X$ est une variété differentiable, munie de sa difféologie canonique, on retrouve bien sûr les groupes d'homotopie usuels.

Toute variété muni de sa structure différentielle usuelle est canoniquement un espace difféoloqique; on peut montrer en fait que toute variété $X$ connexe est un espace homogène de groupe générateur Diff $(X)_0$, de plus les objets obtenus par les définitions 2.4.3 (groupe fondamental et revêtement universel) coïncident avec ceux provenant des définitions usuelles [7].

*Difféologie et topologie*

Soit $X$ un espace *topologique*; nous pouvons définir une difféologie en choisissant comme plaques de $X$ les applications *continues* d'ouverts de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $X$.

Il est clair que l'on définit bien une difféologie sur $X$. Désignons la par «Topo--difféologie». Il est immédiat qu'une application continue entre espaces topologiques est différentiable au sens de leur topo-difféologie, en particulier les homéomorphismes sont des difféomorphismes (la réciproque est vraie s'il s'agit de variétés topologiques). Une remarque: une partie topologiquement discrète est topo--difféologiquement discrète; la réciproque est évidemment fausse, les rationnels forment une partie topo-difféologiquement discrète de $\mathbb{R}$.

Si de plus $X$ est séparé et connexe par arcs alors les groupes d'homotopie issus de la difféologie sont précisément les groupes d'homotopie usuels obtenus par le formalisme topologique. Ceci illustre le fait que l'axiomatique de la continuité n'est pas le seul accès à l'homotopie; il existe d'ailleurs des définitions abstraites et combinatoires de l'homotopie [15] et [13].

## §3. EXEMPLES DE REVETEMENTS DE GROUPES DIFFEOLOGIQUES

Un problème posé au début de ce travail, est la définition, et éventuellement le calcul, de revêtements de groupes de difféomorphismes, en fait de leur composante neutre. Pour ces groupes la connexité difféologique coïncide avec la connexité au sens de l'isotopie différentiable. Pour ce qui est de cette composante neutre, il est clair que Diff $(X)_0$, dans le cas $X$ orientée, est contenue dans le groupe des difféomorphismes conservant l'orientation, mais sa caractérisation est une question ardue. On sait par exemple (Cerf [3]) qu'il y a égalité entre Diff $(S^3)_0$ et les difféomorphismes conservant l'orientation. Notons que pour les groupes de difféomorphismes de variétés compactes, l'homotopie difféologique coïncide avec l'homotopie usuelle (pour la topologie de Whitney), puisqu'alors tout chemin continu est équivalent à un chemin différentiable.

### 3.1. Un revêtement de Diff (X)

Soit $p : \widetilde{X} \to X$ le revêtement universel d'une variété $X$ connexe; notons Iso $(\widetilde{X})$ le groupe des isomorphismes du revêtement, c'est à dire le groupe des relevés des éléments de Diff $(X)$. Nous notons $P$ la projection canonique: $P$ : Iso $(\widetilde{X}) \to$ $\to$ Diff $(X)$ définie par $p \circ f = P(f) \circ p$. On a alors:

PROPOSITION 3.1.1. *$P$ : Iso $(\widetilde{X}) \to$ Diff $(X)$ est un vevêtement.*

Il est trivial que $P$ est un morphisme de groupes surjectif. $P$ est différentiable: soit $r \mapsto \varphi(r)$ une plaque Iso $(\widetilde{X})$; $p$ étant un diféomorphisme local, on peut écrire localement:

$$P(\varphi(r))(x) = p(\varphi(r) \circ p^{-1}(x))$$

le deuxième terme est différentiable par hypothèse donc $P$ l'est aussi. Le noyau de $P$ n'est autre que Aut $(\widetilde{X})$, isomorphe au groupe fondamental de $X$, donc discret. Il reste à vérifier que $P$ est une submersion, donc strict: soit $\varphi$ une plaque de Diff $(X)$; il s'agit de montrer l'existence d'un choix, différentiable en $r$, de relevés des $\varphi(r)$. Fixons $r_0 \in$ def $(\varphi)$; $\varphi(r_0)$ est un difféomorphisme de $X$; fixons aussi un relevé $\widetilde{\varphi(r_0)} \in$ Iso $(\widetilde{X})$. Localement (i.e. dans un voisinage où $p$ est un difféomorphisme local) on pose:

$$\widetilde{\varphi}(r)(\widetilde{x}) = p^{-1}(\varphi(r)(p(\widetilde{x})) \quad \text{avec} \quad \widetilde{\varphi}(r_0)(\widetilde{x}) = \widetilde{\varphi(r_0)}(\widetilde{x}).$$

Les relèvements des difféomorphismes de $X$ sont globalement déterminés par la valeur prise en un point; l'égalité ci-dessus montre donc qu'il existe dans un voisinage de $r_0$ un choix différentiable de relevés, donc que $P$ est une submersion. CQFD

Il n'y a aucune raison à priori pour que le revêtement ainsi construit soit connexe; il le sera dans l'exemple ci-dessous des difféomorphismes du cercle. Nous signalerons plus loin un cas où il ne le sera pas (3.6).

### 3.2. Les difféomorphismes de la droite et du cercle

Notons $G$ le groupe des difféomorphismes de la droite réelle à dérivée positive, dont nous savons qu'il contient Diff $(\mathbb{R})_0$. Soit $\Psi$ une fonction différentiable non décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant au voisinage de l'origine et valant un au voisinage de l'unité. Pour $f \in G$ quelconque posons: $\Theta(t)(x) = [1 - \Psi(t)]x +$ $+ \Psi(t)f(x)$, $\Theta$ définit un chemin différentiable dans $G$ reliant $f$ à l'identité, donc $G$ est connexe et $G =$ Diff $(\mathbb{R})_0$.

Soit $G' =$ Diff$_{2\pi}(\mathbb{R})_0$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ relevant ceux du cercle qui conservent l'orientation; c.à.d. $f \in G'$ ssi $f$ est un difféomorphisme croissant tel que:

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi \quad \text{et ce pour tout } x \text{ réel.}$$

$G'$ se projette canoniquement sur Diff $(S^1)$ par:

$$P : f \to P(f) \quad \text{où} \quad P(f)(e^{ix}) = e^{if(x)}$$

on sait (3.1.1) que $P : G' \to \mathrm{Diff}\,(S^1)_0$ est un revêtement, le noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que la composante neutre des difféomorphismes du cercle est Im $(P)$, en fait on a:

PROPOSITION 3.2.1. 1) $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R})_0$ *et* $\mathrm{Diff}_{2\pi}(\mathbb{R})_0$ *sont simplement connexes,*
2) $P : \mathrm{Diff}_{2\pi}(\mathbb{R})_0 \to \mathrm{Diff}\,(S^1)_0$ *est un revêtement universel, et* $D - \Pi_1(\mathrm{Diff}\,(S^1)_0) = \mathbb{Z}$.

Les arguments ci-dessus font qu'il suffit d'établir 1). Pour tout lacet $\lambda$ dans $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R})_0$ on pose:

$$\Theta(s)(t)(x) = [1 - \Psi(s)]x + \Psi(s)\,\lambda(t)(x)$$

$\Psi$ est la fonction de raccord définie ci-dessus; $\Theta$ est un chemin dans les lacets allant de l'identité à $\lambda$ (vérification facile); ainsi $L(\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R})_0) = L(\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R})_0)_0$ (0.5.2). La simple connexité de $\mathrm{Diff}_{2\pi}(\mathbb{R})_0$ se vérifie exactement de la même façon. C.Q.F.D.

### 3.3. Déformation rétracte

Ce lemme sur la déformation rétracte est analogue à la situation topologique correspondante. La démonstration, elle, ne peut quitter le cadre difféologique.

LEMME 3.3.1. *Soient $G$ un groupe difféologique connexe, $G'$ un sous-groupe connexe de $G$; $p : \widetilde{G}' \to G'$ désigne le revêtement universel de $G'$. Soit $R$ une application différentiable de $\mathbb{R} \times G$ dans $G$ telle que, pour tous $g \in G$, $g' \in G'$, $s$ réel:*

$$R(s, g') = g', \quad R(0, g) = g, \quad R(1, g) \in G'$$

*alors $D - \Pi_1(G) \approx D - \Pi_1(G')$.*

*Si, de plus, $R(1, .)$ est un $D$-morphisme de $G$ sur $G'$, c.à.d. pour tous $g$ et $h$ dans $G$ : $R(1, gh) = R(1, g)R(1, h)$, alors:*

$$\widetilde{G} = \{(g, \widetilde{g}') \in G \times \widetilde{G}' / p(\widetilde{g}') = R(1, g)\}$$

*se projetant canoniquement sur $G$, est revêtement universel de $G$.*

*Démonstration.* Le groupe fondamental de $G$ (resp. $G'$) est égal au groupe des composantes de son groupe des lacets (0.5.3), à savoir $L(G)/L(G)_0$ (resp. $L(G')/L(G')_0$).

Pour toute application $x \mapsto f(x)$ à valeurs dans $G$, nous posons:

$$R(s,f)(x) = R(s,f(x)).$$

Avec cette notaion nous définissons une application de $L(G)$ dans $L(G')$ par: $\lambda \to R(1,\lambda)$, où $\lambda \in L(G)$; $R(1,\lambda)$ est, par définition, un élément de $L(G')$. Il est immédiat que l'on vient de définir une surjection, de plus:

$$R(1,\lambda) \in L(G')_0 \Longleftrightarrow \lambda \in L(G)_0$$

en effet: si $\Theta$ est un chemin différentiable dans $L(G)$ allant du lacet neutre à $\lambda$, alors $R(1,\Theta)$ est un chemin dans $L(G')$ joignant le lacet neutre à $R(1,\lambda)$.

Réciproquement: si $R(1,\lambda) \in L(G')_0$, c'est qu'il existe un chemin $\Theta$ joignant le lacet neutre à $R(1,\lambda)$, il suffit alors de poser:

(3.3.2) $$\Theta'(s) = R(1,\lambda)^{-1}\Theta(s)R(1-s,\lambda) \quad s \text{ réel}$$

pour établir que $\lambda \in L(G)_0$.

Enfin, en passant par le revêtement universel $\widetilde{G}'$ on peut établir [7] que pour tous $\lambda$ et $\mu$ lacets dans $G$:

$$R(1,\lambda\mu) \sim R(1,\lambda)\,R(1,\mu)$$

(où $\sim$ désigne l'équivalence modulo $L(G')_0$), ce qui montre que $R(1,.)$ induit un isomorphisme de $L(G)/L(G)_0$ sur $L(G')/L(G')_0$. La première partie du lemme est donc prouvée.

On suppose à présent que $R(1,.)$ est un $D$-morphisme de groupe. Cette hypothèse ajoutée au fait que $p$ est lui-même un $D$-morphisme entraîne facilement que $G$ est un sous-groupe du produit direct $G \times \widetilde{G}'$ (c'est un produit fibré). De plus:

1. *$\widetilde{G}$ est connexe*: en effet, soit $(g,\widetilde{g}') \in \widetilde{G}$, notons $\gamma$ un arc de $G$ allant de $e$ à $g$; alors $R(1,\gamma)$ est un arc joignant $e$ à $g'$ où: $p(\widetilde{g}') = R(1,g) = g'$

$\widetilde{R(1,\gamma)}$ est l'unique relevé de $R(1,\gamma)$ partant de l'élément neutre de $\widetilde{G}'$; il a pour extrémité:

$$\widetilde{R(1,\gamma)}(1) = \widetilde{g}'' \text{ avec } p(\widetilde{g}'') = g'.$$

Soit $\widetilde{\mu}$ un chemin dans $\widetilde{G}'$ allant $\widetilde{g}''$ à $\widetilde{g}'$, posons:

$$\widetilde{\gamma}' = \widetilde{R(1,\gamma)}\,\widetilde{g}''^{-1}\widetilde{\mu}$$

$\tilde{\gamma}'$ est arc joignant $\tilde{e}$ à $\tilde{g}'$, il se projette sur $R(1,\gamma)g'^{-1}\mu$, où $\mu$ est un lacet dans $G'$ de point de base $g'$; posons enfin:

$$\gamma''(t) = \gamma(t)g'^{-1}\mu(t)$$

$\gamma''$ est un arc ayant $g$ pour extrémité, de plus:

$$p(\tilde{\gamma}'(t)) = R(1,\gamma(t))g'^{-1}\mu(t) = R(1,\gamma(t)g'^{-1}\mu(t)) = R(1,\gamma''(t))$$

donc $(\gamma'', \tilde{\gamma}')$ est un chemin dans $\tilde{G}$ allant de l'élément neutre à $(g, \tilde{g}')$.

2. $\tilde{G}$ *est simplement connexe*: soit $(\lambda, \tilde{\lambda}')$ un lacet dans $\tilde{G}$, en particulier $\tilde{\lambda}'$ est homotope au lacet neutre, donc par projection, en posant:

$$\lambda' = p(\tilde{\lambda}') = R(1,\lambda)$$

$\lambda'$ est un lacet dans $G'$ homotope au lacet neutre, et de même pour $\lambda$ (grâce à 3.3.2); soit donc $\Theta$ une homotopie de $\lambda$ à l'arc neutre; $R(1,\Theta)$, qui est une homotopie de $\lambda'$ à l'arc nul, se relève en $\widetilde{R(1,\Theta)}$ à partir de l'origine dans $\tilde{G}'$, mais $\widetilde{R(1,\Theta)}(1)$ se projette sur $\lambda'$ et donc par unicité: $\widetilde{R(1,\Theta)}(1) = \tilde{\lambda}'$ ainsi $\widetilde{R(1,\Theta)}$ définit une homotopie de $\tilde{\lambda}'$ à l'arc neutre; finalement $(\Theta, \widetilde{R(1,\Theta)})$ est une homotopie de $(\lambda, \tilde{\lambda}')$ à $\tilde{e}$.

3. $P : \tilde{G} \to G$ définie par $P(g, \tilde{g}') = g$ est trivialement un $D$-morphisme surjectif avec $\operatorname{Ker}(P) = (e) \times \operatorname{Ker}(p)$; il est strict: soit $r \mapsto f(r)$ une plaque de $G$. La projection $p$ étant stricte, l'application $r \mapsto R(1, f(r))$ se relève localement dans $\tilde{G}'$ par $\widetilde{R(1,f(r))}$; ainsi $r \mapsto (f(r), \widetilde{R(1,f(r))})$ est un relevé local de $f$ dans $\tilde{G}$, qui est donc un revêtement simplement connexe de $G$. CQFD

### 3.4. Les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$

Une remarque au préalable: soit $p : \tilde{G} \to G$ le revêtement universel d'un groupe difféologique connexe $G$, si $f : G \to G'$ est un difféomorphisme ($G'$ groupe difféologique) en fixant $\tilde{e} \in \tilde{G}$ tel $f(p(\tilde{e})) = e'$, il existe sur $\tilde{G}$ une unique loi de groupe difféologique pour laquelle $\tilde{e}$ soit élément neutre et $f \circ p : \tilde{G} \to G'$ soit un revêtement simplement connexe du groupe $G'$: c'est la loi transportée du revêtement universel de $G'$ par l'inverse du relevé de $f$ appliquant $\tilde{e}$ sur $\tilde{e}'$.

Soit $D$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ laissant l'origine fixe; sur $D \times \mathbb{R}^n$ on définit la loi:

$$(f,x)(g,y) = (T(-f(y)) \circ f \circ T(y) \circ g, \quad f(y) + x)$$

où $T(r)$ désigne la translation de vecteur $r \in \mathbb{R}^n$.

Pour cette loi et pour la diffèologie standard (groupe de difféomorphismes et produit direct), $D \times \mathbb{R}^n$ est un groupe difféologique (vérification facile). On définit alors un $D$-isomorphisme de ce groupe dans Diff$(\mathbb{R}^n)$ en associant à tout $(f, x) \in D \times \mathbb{R}^n$ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par: $r \mapsto f(r) + x$.

Le calcul du revêtement universel de Diff$(\mathbb{R}^n)$ se ramène donc à celui du produit direct muni de la loi ci-dessus. L'invariance par difféomorphisme fait qu'il suffit de connaitre le revêtement universel du groupe produit direct, et en définitive celui de $D$.

Notons $P : \widetilde{Gl(n)}_0 \to Gl(n)_0$ le revêtement universel de la composante neutre du groupe linéaire. Nous notons $\tilde{1}$ l'élément neutre de $\widetilde{Gl(n)}$.

Avec les notations et remarques ci-dessus nous avons l'énoncé suivant:

PROPOSITION 3.4.1. Diff$(\mathbb{R}^n)_0$ *coïncide avec le groupe des difféomorphismes de* $\mathbb{R}^n$ *conservant l'orientation. Il admet comme revêtement universel l'ensemble défini par les triplets:*

$$(f, A, x) \in D \times \widetilde{Gl(n)}_0 \times \mathbb{R}^n \quad \textit{tels que:} \quad P(A) = f'(0)$$

*et muni de l'unique loi de groupe telle que* (id$(\mathbb{R}^n), \tilde{1}, 0)$ *soit élément neutre, et que la projection:* $(f, A, x) \mapsto [r \mapsto f(r) + x]$ *soit un* $D$*-morphisme; de plus:*

$$D - \Pi_1(\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) = \Pi_1(Gl(n)).$$

Preuve: il existe une déformation rétracte de $D_0$ sur $Gl(n)_0$; on pose pour tout $f \in D_0$:

$$H(s, f)(x) = \int_0^1 f'(stx)(x)dt \quad \begin{array}{l}(\text{on a } H(0, f)(x) = f'(0)(x) \\ \text{et} \quad H(s, f)(x) = f(sx)/s).\end{array}$$

On peut vérifier, grâce au caractère $C^\infty$ des $f$, que $R(s, f) = H(1 - s, f)$ satisfait bien aux hypothèses 3.3.1. Cette rétraction relie tout élément de $D$ conservant l'orientation à un élément de $Gl(n)_0$; donc $D_0$ coïncide avec les éléments de $D$ conservant l'orientation. Il suffit alors d'appliquer 3.3.1 et les remarques ci--dessus pour conclure. CQFD

### 3.5. Réalisation de revêtements comme groupe de difféomorphisms

Il est possible de réaliser, au sens défini en 0.3.2, le revêtement ci-dessus comme groupe de difféomorphismes. Considérons le diagramme suivant (où les ~ surmontant les groupes désignent les revêtements universels):

(3.5.1)
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Gl(n)} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n \times \widetilde{Gl(n)}) \arrow[d] \\
Gl(n) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n \times Gl(n))
\end{tikzcd}$$

Iso ($\mathbb{R}^n \times \widetilde{Gl(n)}$) est le revêtement de Diff ($\mathbb{R}^n \times Gl(n)$) défini par 3.1.1, $\Phi$ est l'injection naturelle: $\Phi(f)(r, A) = (f(r), f'(r)A)$.

$\Phi$ est trivialement un $D$-morphisme injectif et strict, qui se relève par le $D$--morphisme $\widetilde{\Phi}$, appliquant (id, $\widetilde{1}$, 0) sur l'élément neutre.

$\widetilde{\Phi}$ est injective: si $(f, A, x)$ est appliqué par $\widetilde{\Phi}$ sur l'élément neutre, c'est qu'il se projette sur l'identité, donc qu'il est de la forme (id, $A$, 0) et se trouve dans l'image par $\widetilde{i}$ de $\widetilde{Gl(n)}$, or, sur cette image, $\widetilde{\Phi}$ se réduit à l'injection canonique de $\widetilde{Gl(n)}$ dans Diff ($\mathbb{R}^n \times \widetilde{Gl(n)}$) (grâce à l'unicité des relèvements), finalement $(f, A, x) = (\mathrm{id}, \widetilde{1}, 0)$.

Enfin $\widetilde{\Phi}$ est stricte: toute plaque $f$ à valeurs dans Im ($\widetilde{\Phi}$) se projette sur Im($\Phi$), $\Phi$ étant stricte ainsi que toutes les projections, on pourra, par commutativité du diagramme, définir un relevé local de $f$.

*Remarque 3.5.2.* Les démonstrations ci-dessus s'adaptent immédiatement aux symplectomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ qui on donc même homotopie que $Sp(2n)$ (groupe des symplectomorphismes linéaires). Et les énoncés ci-dessus restent vrais en remplaçant le groupe Diff ($\mathbb{R}^n$) par le groupe des symplectomorphismes Can ($\mathbb{R}^{2n}$), et $Gl(2n)$ par $Sp(2n)$.

### 3.6. Quantomorphismes

Nous rappelons qu'une variété quantique est la donnée d'un fibré principal $Y$, de groupe structural $S^1$, et muni d'une 1-forme de connexion dont la dérivée extérieure se projette sur une 2-forme symplectique de la base. Les isomorphismes de cette structure forment le groupe des quantomorphismes noté Quant($Y$).

Le produit direct $Y = \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ est muni de la 1-forme canonique de contact $\omega$; on a pour tout vecteur $V = (Vp, Vq, Vz)$ tangent au point $\xi = (x, z) = (p, q, z)$:

$$\omega(\xi)(V) = \langle p, Vq\rangle + \frac{Vz}{iz}$$

$\Theta(x)(Vp, Vq) = \langle p, Vq\rangle$ est la 1-forme potentielle de la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

On peut montrer [7] que tout quantomorphisme de $Y$ est de la forme:

$$(x, z) \mapsto (f(x), zz_0 e^{i\alpha(f)(x)})$$

où $f \in \mathrm{Can}\,(\mathbb{R}^{2n})$, groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$, et $\alpha(f)$ est une fonction de $x$ telle que.

$$d\alpha(f)(x)(Vp, Vq) = \Theta(x)(Vp, Vq) - \Theta(f(x))(f'(x)(Vp, Vq))$$

$$\text{et} \quad \alpha(0) = 0.$$

On a la relation:

(3.6.1) $$\alpha(f\circ g)=\alpha(f)+\alpha(f)\circ g-\alpha(f)(g(0)).$$

On munit le produit Can $(\mathbb{R}^{2n})\times\mathbb{R}$ de la loi

(3.6.2) $$(f,t).(g,s)=(f\circ g,t+s+\alpha(f)(g(0)))$$

qui est une loi de groupe (grâce à 3.6.1); la difféologie produit en fait un groupe difféologique (différentiabilité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales). Avec cette structure, l'application définie par:

$$(f,t)\mapsto[(x,z)\mapsto(f(x),ze^{it}e^{\alpha(f)(x)})]$$

est un $D$-morphisme strict et surjectif de Can $(\mathbb{R}^{2n})\times\mathbb{R}$ sur Quant $(Y)$ dont le noyau est $D$-isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il définit donc une extension de Quant $(Y)$ par le tore (analogie avec le groupe de Weyl, voir [20]). Grâce à toutes ces remarques ainsi qu'à 3.3.1, 3.5.1 et 3.5.2 on peut finalement énoncer:

THÉOREME 3.6.3. *$p:\widetilde{Sp(n)}_0\longrightarrow Sp(n)_0$ désignant le revêtement universel de $Sp(n)_0$, alors la composante neutre de* Quant $(\mathbb{R}^{2n}\times S^1)$ *admet $\mathbb{Z}^2$ comme D-groupe fondamental, et pour revêtement universel l'ensemble des quadruplets $(f,A,x,t)$ où:*

$$f\in \text{Can}\,(\mathbb{R}^{2n}),\qquad f(0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^{2n},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$A\in\widetilde{Sp(n)}_0\qquad \textit{et}\qquad f'(0)=p(A),$$

*ensemble muni de l'unique loi de groupe telle que* $(\text{id},\tilde{1},0,0)$ *soit élément neutre et que la projection:*

$$(f,A,x,t)\mapsto[(x,z)\mapsto(f(x),ze^{it}e^{i\alpha(f)(x)})]$$

*soit un D-morphisme, morphisme qui est alors surjectif et strict.*

Le théorème 2.3.3 permet alors d'expliciter tous les autres revêtements de Quant $(Y)$ dont celui à deux feuillets qui joue un rôle particulier (indice de Maslov et revêtement métaplectique cf. [2] et [21]). Et un schéma de même type que 3.5.1 permet de réaliser le revêtement universel de Quant $(Y)$ comme sous-groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}\times\widetilde{Sp(n)}\times\mathbb{R}$.

Nous avons dit dans l'introduction pourquoi il est important de pouvoir réaliser ces revêtements comme groupes de difféomorphismes de variétés auxiliaires. Savoir si cela est toujours possible est une question ouverte. On sait depuis un théorème de Smale [19] qu'il existe une déformation rétracte des difféomorphismes de la 2-sphère sur $SO(3)$, ce qui règle la question des groupes d'homotopie. On pense alors à la deuxième partie du lemme 3.3.1 qui permet une réalisation du revêtement universel, moyennant l'existence d'une déformation rétracte qui soit un homomorphisme au bout de la déformation. Pour ce qui est des difféomorphismes de la sphère, ou plus généralement d'une variété compacte orientable, l'existence d'un tel homomorphisme se heurte à l'obstruction suivante.

Le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte orientable est simple; c.à.d. n'admet pas de sous-groupe invariant qui soit propre et non trivial. (pour ces questions cf. [9], [16], [17] parmi d'autres).

On sait aussi que la composante neutre du groupe des difféomorphismes du tore à deux dimensions possède la même homotopie que le tore lui-même, par contre les difféomorphismes d'une surface de genre $\geqslant 2$ ont une première homotopie nulle [1]; on peut alors affirmer que, dans ce dernier cas, le revêtement construit en 3.1.1. n'est pas connexe.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] P.L. ANTONELLI, D. BURGELEA and P.J. KAHN, *The non-finite homotopy type of some diffeomorphism groups*, Topology vol. 11 (1972) 1 - 49.

[2] V. ARNOLD, *Méthodes math. de la mécanique classique*, éditions Mir Moscou 1976.

[3] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma 4 = 0$), Lect. notes in Math. (53) Springer-Verlag Berlin 1968.

[4] A. CONNES, *An analogue of the Thom isomorphism for cross products of $C^*$-algebras*, Adv. in Math. vol. 39, 1 (1981).

[5] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse Tome III*, Gauthier-Villars, Paris 1970.

[6] P. DIRAC, *The principles of quantum mechanics*, New York 1958.

[7] P. DONATO, *Revêtements et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes*, Thèse, Université de Provence, Marseille 1984.

[8] P. DONATO and P. IGLESIAS, *Example de groupes différentiels: flots irrationnels sur le Tore*, Preprint du Centre de Physique Théorique de Marseille, CPT-83/P.1524.

[9] C.J. EARLE and J. EELLS, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, J. Diff. Geom. 3 (1969), 621 - 626.

[10] C. GODBILLON, *Eléments de Topologie algébrique*, Hermann Paris, 1971.

[11] M. GOLUBITSKY and V. GUILLEMIN, *Stable Mappings and their singularities*, Springer--Verlag, Berlin, 1974.

[12] P. HORVATHY and J.H. RAWNSLEY, *Topological charges in monopoles theories*, preprint du centre de physique théorique de Merseille, CPT-84/P.1594.

[13] T.S. HU, *Homotopy Theory*, Academic press New York 1959.

[14] P. IGLESIAS, *Fibrés difféologiques et Homotopie*, Thèse (en préparation).

[15] D. KAN, *An axiomatization of the homotopy groups*, Illinois Journal of Math. 2 (1958), 548 - 568.

[16] J. MATHER, *Commutators of Diffeomorphisms*, Com. Math. Helv. 49 (1974), 312 - 328.

[17] J. MATHER, *Commutators of Diffeomorphisms*, Com. Math. Helv. 50 (1975), 33 - 40.

[18] M.A. RIEFFEL, *$C^*$-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. of Math. 93, 2 (1981), 415 - 429.

[19] S. SMALE, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., 19, 1959, 621 - 627.

[20] J.M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod Paris, 1970.
[21] J.M. SOURIAU, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications 4th Intern. Coll. on Group Theoretical Methods in Physics*, Univ. of Nijmegen (1975).
[22] J.M. SOURIAU, *Groupes Différentiels*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 836, 1981, p. 81.

*Manuscript received: February 2, 1985*